

NOVEMBER/DECEMBER 2023

CMA52/BMA52 — REAL ANALYSIS

Time : Three hours

Maximum : 75 marks



SECTION A — (10 × 2 = 20 marks)

Answer ALL the questions.

1. Define one to one function.
1-1 சார்பை வரையறு.
2. Define countable.
வரையறு : எண்ணிடத்தக்கது.
3. Define bounded sequence.
வரம்புடைய வரிசையை வரையறு.
4. Define limit inferior.
தாழ்வரம்பை வரையறு.
5. Define absolute convergence.
தனித்த ஒருங்குதலை வரையறு.
6. Define comparison test for absolute convergence.
தனித்த ஒருங்குதலுக்கான ஒப்பீட்டு சோதனையை வரையறு.

7. Define class l^2 .
வகுப்பு l^2 வரையறு.
8. Define non increasing function.
ஏற்றம் அல்லாத சார்பை வரையறு.
9. Define homeomorphic function.
வடிவொப்புமை சார்பை வரையறு.
10. Define closure set.
வரையறு : மூடிய கணம்.

SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL the questions.

11. (a) Prove that the set of all rational numbers in $[0, 1]$ is countable.

$[0, 1]$ ன் அனைத்து விகிதமுறு எண்களின் கணம் எண்ணிடத்தக்கது என நிரூபி.

Or

- (b) Prove that the non empty subset A has a greatest lower bound in R .

R -ல், வெற்றற்ற உட்கணம் A , க்கு மீப்பெரு கீழ்வரம்பு உண்டு என நிறுவுக.



19. Prove that f is continuous $\Leftrightarrow$ the inverse image of every open set under f is open.

f என்ற சார்பு தொடர்ச்சியானது $\Leftrightarrow f$ -ன் கீழ் எந்த ஒரு திறந்த கணத்தின் தலைகீழ் பிம்பமும் திறந்த கணம் என நிறுவுக.

20. If $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of positive numbers such that

(a) $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ then prove that alternating series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ is convergent.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது மிகை எண்களின் வரிசை மற்றும்

(அ) $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$

(ஆ) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ எனில் மாற்றுத்தொடர் $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ என்பது ஒருங்கும் வரிசை என நிறுவுக.

12. (a) Prove that the sequence $\{(1 + 1/n)^n\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent.

$\{(1 + 1/n)^n\}_{n=1}^{\infty}$ ஒருங்கும் வரிசை என நிறுவுக.

Or

- (b) Prove that $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a cauchy sequence if the sequence of real numbers $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges.

மெய்யெண்களின் வரிசை $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ஒருங்கும் வரிசை எனில் $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ காஷியின் வரிசை ஆகும் என நிறுவுக.

13. (a) Prove that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges if $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges absolutely.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ தனித்த ஒருங்கும் வரிசை

எனில் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஒருங்கும் என நிறுவுக.

Or

- (b) If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is a series of non negative numbers

which converges to $A \in \mathbb{R}$ and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ is a

rearrangement of $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ then prove that

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converges and $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = A$.



$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்ற குறையெண் இல்லாத எண்களின் வரிசை மற்றும் A -க்கு ஒருங்குகிறது, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ என்பது $\sum a_n$ -ன் மாற்றி அமைக்கப்பட்ட வரிசை எனில் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ஒருங்குகிறது மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = A$ என நிரூபி.

14. (a) Prove that the series $\sum 1/n^2$ converges.

$\sum 1/n^2$ ஒருங்குகிறது என நிரூபி.

Or

- (b) Prove that $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$, if $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ and $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ எனில் $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$ என நிரூபி.

15. (a) Prove that the intersection of any finite numbers of open sets is open.

திறந்த கணங்களின் முடிவுள்ள வெட்டுக்கணம் திறந்தது என நிரூபி.

Or

- (b) Prove that f is continuous on $M_1 \Leftrightarrow f^{-1}(F)$ is closed subset of M_1 whenever F is closed subset of M_2 .

f என்பது M_1 ல் தொடர்ச்சியான சார்பு $\Leftrightarrow F$ என்பது M_1 -ல் முடிய உட்கணம் எனில் $f^{-1}(F)$ என்பது M_2 ல் முடிய உட்கணம் என நிறுவுக.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Prove that all subsequence of a convergent sequence of real numbers converge to a same limit.

மெய் எண்களை கொண்ட ஒருங்கு வரிசையின் அனைத்து உள் வரிசைகளும் ஒரே எல்லைக்கு ஒருங்கும் என நிறுவுக.

17. Prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 6n}{5n^2 + 4} = 3/5$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 6n}{5n^2 + 4} = 3/5$ என நிறுவுக.

18. Prove that $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ if $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a non increasing sequence of +ve numbers and if $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது ஏற்றம் அல்லாத மிகை எண்களின்

வரிசை மற்றும் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஒருங்குகிறது எனில்

$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ என நிறுவுக.